Matemática I

Cálculo Diferencial

Engenharia de Telecomunicações e Informática

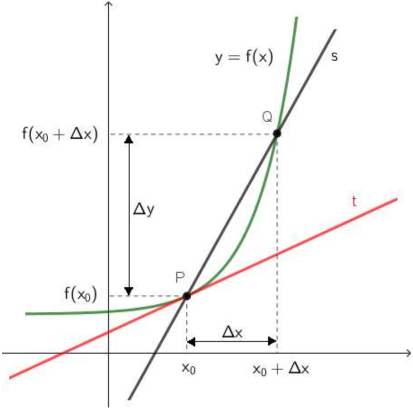
Teresa Araújo
Departamento de Matemática

Derivada de uma Função num Ponto

$y = f(x)$

x variável independente
y variável dependente

Δx variação ou acréscimo da variável independente
Δy variação ou acréscimo da variável dependente ou função
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$



declive da recta secante PQ

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Se existir

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

diz-se que a função $f(x)$ é **diferenciável** em x_0, com $x_0 \in D_f$.

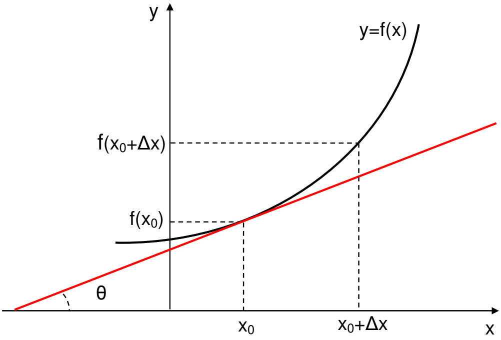
O valor obtido é designado por **derivada da função** para $x = x_0$.

Uma função $f(x)$ diz-se **diferenciável** se é diferenciável em todos os pontos do seu domínio.

Notação $$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$$

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$$

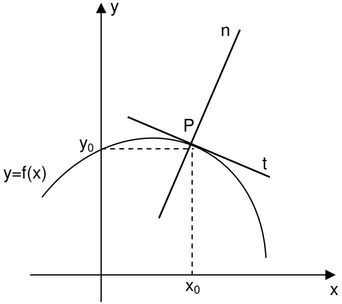
Interpretação Geométrica da Derivada



O valor da derivada de uma função num ponto (x_0, y_0), com $y_0 = f(x_0)$, é **numericamente igual ao valor do declive da recta tangente** à curva representativa da função f nesse ponto.

$$m_{tg} = \text{tg}(\theta) = f'(x_0)$$

Recta Tangente



Declive

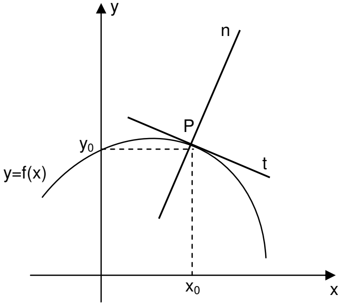
$$m_{tg} = f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Equação da recta tangente à curva no ponto (x_0, y_0)

$$y - y_0 = m_{tg}(x - x_0)$$

Se $f'(x_0) = 0$, a recta tangente é a **recta horizontal** $y = y_0$.

Recta Normal



Declive

$$m_n = -\frac{1}{m_{tg}} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

Equação da recta normal à curva no ponto (x_0, y_0)

$$y - y_0 = m_n(x - x_0)$$

Se $f'(x_0) = 0$ a recta normal é a **recta vertical** $x = x_0$.

Regras Básicas de Derivação

$u = u(x)$, $v = v(x)$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$(k \cdot u)' = k \cdot u'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{k}\right)' = \left(\frac{1}{k} \cdot u\right)' = \frac{1}{k} \cdot u'$$

$$\left(\frac{k}{u}\right)' = \left(k \cdot \frac{1}{u}\right)' = k\left(\frac{1}{u}\right)'$$

Derivadas de Funções Elementares

$u = u(x)$, $v = v(x)$, $n \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$(a^u)' = a^u \cdot \ln(a) \cdot u'$$
$$(e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$(\log_a(u))' = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{u} \cdot u'$$
$$(\ln(u))' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln(u) \cdot v'$$

Derivadas de Funções Trigonométricas

$u = u(x)$

$$(\text{sen}(u))' = \cos(u) \cdot u'$$

$$(\cos(u))' = -\text{sen}(u) \cdot u'$$

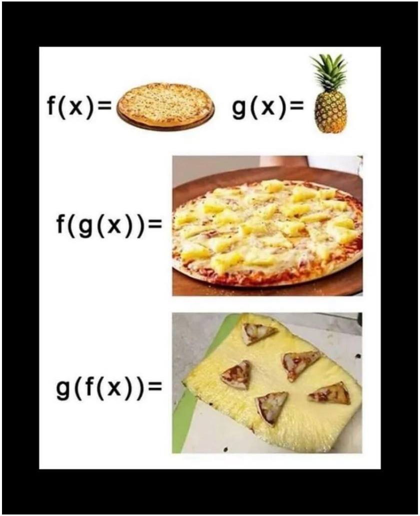
$$(\text{tg}(u))' = \sec^2(u) \cdot u'$$

$$(\text{cotg}(u))' = -\text{cosec}^2(u) \cdot u'$$

$$(\sec(u))' = \sec(u) \cdot \text{tg}(u) \cdot u'$$

$$(\text{cosec}(u))' = -\text{cosec}(u) \cdot \text{cotg}(u) \cdot u'$$

Função Composta



Derivada da Função Composta

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções diferenciáveis, com $g(x) \in D_f$.
A sua função composta é

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Pode mostrar-se que a sua derivada é

$$(f \circ g)'(x) = f'(u)\Big|_{u=g(x)} \cdot g'(x)$$

Ou, fazendo $y = f(u)$ e $u = g(x)$

Derivada da Função Composta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\bigg|_{u=g(x)} \cdot \frac{du}{dx}$$

Para $x = x_0$ temos

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0)$$

com $u_0 = g(x_0)$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{dy}{du}\right|_{u=u_0} \cdot \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Derivada da Função Inversa

Para que uma função admita inversa é necessário que seja uma função injectiva, isto é,

$$\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Seja f^{-1} a função inversa da função f.

Para o par $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y)$ verifica-se

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = y$$

Derivada da Função Inversa

Uma vez que $(f \circ f^{-1})(y) = y$, derivamos ambos os membros em ordem a y. Usando a regra da derivada da função composta, obtemos

$$f'(x)\big|_{x=f^{-1}(y)} \cdot (f^{-1})'(y) = 1$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)\big|_{x=f^{-1}(y)}}$$

Derivada da Função Inversa

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=f^{-1}(y)}}$$

Derivada da Função Inversa

Analogamente, uma vez que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, usando a derivada da função composta obtemos

$$(f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(y)\big|_{y=f(x)} \cdot f'(x)$$

$$1 = (f^{-1})'(y)\big|_{y=f(x)} \cdot f'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)\big|_{y=f(x)}}$$

Derivada da Função Inversa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=f(x)}}$$

Derivada da Função Inversa

Exemplo: Consideremos o par de funções inversas $f(x) = e^x$ e $f^{-1}(y) = \ln(y)$. Determine a derivada da função f^{-1} usando a derivada da função composta.

Sejam $y = e^x$ e $x = \ln(y)$.

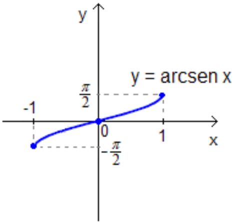
Uma vez que $\dfrac{dy}{dx} = e^x$, vem

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=f^{-1}(y)}} = \frac{1}{e^x\big|_{x=\ln(y)}} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}$$

Derivada da Função Arco-seno

$y = \text{arcsen}(x)$

$D = [-1, 1]$
$D' = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



A sua função inversa é $x = \text{sen}(y)$, pelo que $\frac{dx}{dy} = \cos(y)$. Temos então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=f(x)}} = \frac{1}{\cos(y)|_{y=\text{arcsen}(x)}}$$

Uma vez que $\text{sen}^2(y) + \cos^2(y) = 1$, vem $\cos(y) = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2(y)}$. Como $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, temos $\cos(y) \geq 0$, e então $\cos(y) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(y)}$. Assim

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left.\sqrt{1 - \text{sen}^2(y)}\right|_{y=\text{arcsen}(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Em geral, temos $y = \operatorname{arcsen}(u)$, com $u = f(x)$.
Aplicando a regra da função composta, obtemos

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen}(u)) = \frac{d}{du}(\operatorname{arcsen}(u)) \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

ou seja

$$(\operatorname{arcsen}(u))' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

Derivada das Funções Trigonométricas Inversas

De modo análogo, obtemos

$$(\arccos(u))' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$(\mathrm{arctg}(u))' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$(\mathrm{arccotg}(u))' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

Dizemos que uma função $y = f(x)$ está definida na forma paramétrica quando x e y dependem de uma terceira variável, designada por parâmetro, isto é

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t), t \in D \end{cases}$$

Exemplos de Funções Paramétricas

Funções reais de variável real, $y = f(x)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t), t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Circunferência de centro (x_0, y_0) e raio r

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cdot \cos(t) \\ y = y_0 + r \cdot \mathrm{sen}(t), t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Elipse de centro (x_0, y_0) e eixos a e b

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot \cos(t) \\ y = y_0 + b \cdot \mathrm{sen}(t), t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Hipérbole de centro (x_0, y_0) e eixos a e b

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot \sec(t) \\ y = y_0 + b \cdot \mathrm{tg}(t), t \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 + a \cdot \mathrm{tg}(t) \\ y = y_0 + b \cdot \sec(t), t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Derivada da Função na forma Paramétrica

Sejam $g(t)$ e $h(t)$ funções diferenciáveis e g uma função invertível. A derivada de uma função $y = f(x)$ definida na forma paramétrica calcula-se através das derivadas das funções composta e inversa.

Pela função composta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Por outro lado, se $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$, pela função inversa

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$$

Logo

Derivada da Função Paramétrica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$$

Derivada da Função na forma Paramétrica

Exemplo: Considere a circunferência de centro (x_0, y_0) e raio r

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cdot \cos(t) \\ y = y_0 + r \cdot \operatorname{sen}(t), t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = -r \operatorname{sen}(t) \qquad\qquad \frac{dy}{dt} = r \cos(t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = r \cos(t) \cdot \frac{1}{-r \operatorname{sen}(t)} = -\operatorname{cotg}(t)$$

$n \in \mathbb{N}$

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$$

$$\ldots$$

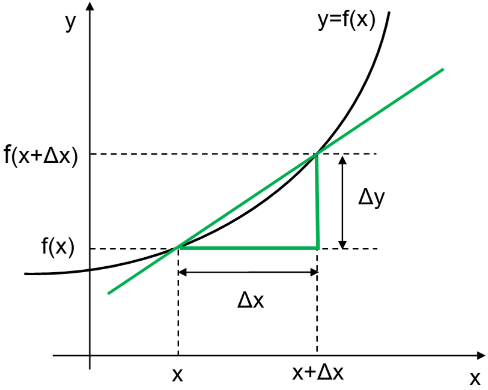
$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

Variação da Função

$y = f(x)$

$x \in D$

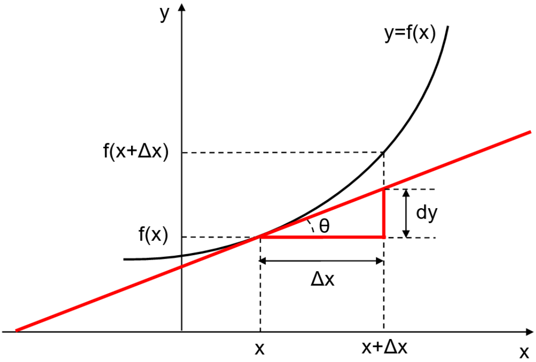
Δx variação (ou acréscimo) da variável independente



Variação (ou acréscimo) da função

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Diferencial



$y = f(x)$

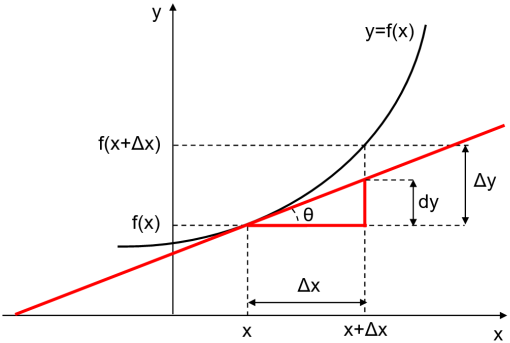
$x \in D$

Δx variação (ou acréscimo) da variável independente

$$\text{tg}(\theta) = \frac{dy}{\Delta x} \qquad m_{\text{tg}} = \text{tg}(\theta) = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Diferencial $\quad dy = f'(x)\Delta x \quad$ ou $\quad dy = \dfrac{dy}{dx}\Delta x$

Diferencial versus Variação da Função



Diferencial

$$dy = f'(x)\,\Delta x = \frac{dy}{dx}\Delta x$$

Variação da função

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Será que, quando $\Delta x \to 0$, a variação Δy pode ser aproximada pelo diferencial dy?

Diferencial versus Variação da Função

Consideremos a diferença

$$\Delta y - dy = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x$$

Quando $\Delta x \to 0$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = \\
&= f'(x_0) - f'(x_0) = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ou seja, quando $\Delta x \to 0$

$$\Delta y \approx dy$$

o diferencial representa uma aproximação da variação total da função.

Diferencial

$$dy = \frac{dy}{dx}\Delta x$$

Para a função identidade $f(x) = x$ temos $\quad dy = 1 \cdot \Delta x$

Do gráfico da função, é imediato que $\quad dy = dx$

Então $\Delta x = dx$. É habitual escrever

$$dy = \frac{dy}{dx}\, dx$$

Em geral, num ponto de abcissa $x_0 \in D$

Diferencial

$$dy = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} dx$$

Sabemos que

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

e que, quando $\Delta x \to 0$

$$\Delta y \approx dy$$

Isto significa que podemos usar a diferencial para calcular aproximações.

Valor Exacto $\quad f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$

Valor Aproximado $\quad f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$

A aproximação entre o diferencial dy e a variação da variável dependente Δy é tanto melhor quanto menor for o acréscimo da variável independente Δx.

Diferencial

Exemplo: Utilizando o facto de $\sqrt{9}$ ser 3, calcule uma aproximação para $\sqrt{8,7}$.

Definimos a função auxiliar $f(x) = \sqrt{x}$.

Uma vez que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, a diferencial da função é

$$dy = \frac{dy}{dx}\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$$

Pretendemos calcular $\sqrt{8,7}$, pelo que procuramos x_0 próximo de $8,7$ tal que $\sqrt{x_0}$ seja um valor exacto. Para $x_0 = 9$, sabemos que $f(x_0) = \sqrt{9} = 3$.

Pretendemos calcular $f(8,7)$, pelo que $x_0 + \Delta x = 8,7$ e temos $\Delta x = -0,3$.

Exemplo: (continuação)
Para $x = 9$, uma vez que $\Delta x = -0,3$, vem

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{9}}(-0,3) = \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) = -\frac{1}{20}$$

De $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ temos $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y$, ou seja, neste caso

$$f(8,7) = f(9) + \Delta y$$

Como, para valores pequenos de Δx, se tem $\Delta y \approx dy$, vem

$$f(8,7) \approx f(9) + dy$$

Uma vez que $f(9) = \sqrt{9} = 3$ obtemos a aproximação

$$\sqrt{8,7} \approx 3 - \frac{1}{20} \Leftrightarrow \sqrt{8,7} \approx \frac{59}{20}$$